Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Ю. С. САРАТОВ, В. Н. БАРАНОВ, Н. Л. НАРСКАЯ

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
1999

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

Ю.С. САРАТОВ, В.Н. БАРАНОВ, Н.Л. НАРСКАЯ

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Методические указания к курсовой работе по теоретической механике

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
1999

ББК 22.21
С20

Рецензент *А.М. Гуськов*

С20 Саратов Ю.С., Баранов В.Н., Нарская Н.Л.
Динамика материальной точки: Методические указания к курсовой работе по теоретической механике. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. — 24 с., ил.

Методические указания содержат задания курсовой работы по разделу теоретической механики "Динамика материальной точки". Приведены основные уравнения движения точки в инерциальной и неинерциальной системах отсчета, рассмотрены примеры решения типовых задач, даны 32 варианта курсовой работы.

Для студентов 2-го курса всех специальностей.
Ил. 39.

ББК 22.21

Редакция заказной литературы

Юрий Сергеевич Саратов
Виктор Николаевич Баранов
Наталия Лазаревна Нарская

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Заведующая редакцией *Н.Г. Ковалевская*
Редактор *С.А. Филиппова*
Корректор *М.А. Василевская*

Подписано в печать 04.08.97. Формат 60x84/16. Бумага тип № 2.
Печ.л. 1,5. Усл.печ.л. 1,4. Уч-изд.л. 1,09. Тираж 1000 экз. Изд. № 103.
Заказ 10 С 79

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

1. Динамика материальной точки в инерциальной системе отсчета

Дифференциальное уравнение движения материальной точки относительно инерциальной системы отсчета в векторной форме имеет вид

$$m\, d^2 \bar{r} / dt^2 = \bar{F}, \qquad (1)$$

где $\bar{F}(\bar{r}, \bar{v}, t) = \sum \bar{F}_k$ — равнодействующая всех (активных и реакций связей) приложенных к точке сил, m — масса, $\bar{r}$ — радиус-вектор, $\bar{v}$ — скорость точки.

Для решения задач динамики применяют уравнения в скалярной форме, проецируя уравнение (1) на те или иные оси (рис. 1). Так в проекциях на оси декартовой системы координат движение материальной точки описывается системой уравнений

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x, \\ m\ddot{y} = F_y, \\ m\ddot{z} = F_z. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv_x}{dt}$, $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dv_y}{dt}$, $\ddot{z} = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{dv_z}{dt}$ — проекции ускорения $\bar{a}$ на оси координат.

В частных случаях движение точки по плоскости или по прямой линии описывается соответственно двумя или одним дифференциальными уравнениями 2-го порядка. Остальные уравнения вырождаются в условия равновесия и служат для определения реакций связей. Так, при движении по плоскости Oxy будем иметь

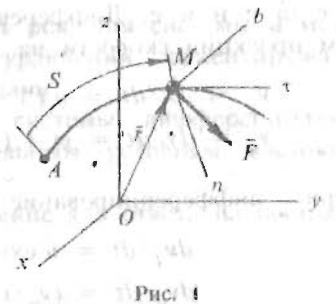


Рис. 1

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x, \\ m\ddot{y} = F_y, \\ F_z = 0. \end{cases} \tag{3}$$

При движении по прямой линии (например, Ox)

$$m\ddot{x} = F_x \quad \text{и} \quad F_y = F_z = 0. \tag{4}$$

Если траектория точки известна, целесообразно применять уравнения в проекциях на естественные оси (касательную, главную нормаль и бинормаль):

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau, \\ mv^2/\rho = F_n, \\ F_b = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где s — дуговая координата точки, отсчитываемая от некоторого начала отсчета на траектории, ρ — радиус кривизны траектории.

В динамике точки рассматриваются прямая и обратная задачи. В прямой по заданному движению точки требуется найти действующую на нее силу. Задача решается путем дифференцирования заданных кинематических уравнений движения точки и последующего определения силы $\overline{F}$ по проекциям на соответствующие оси.

Пример 1. Материальная точка массой m движется согласно уравнениям

$$x = ut - u\tau(1 - \exp(-t/\tau)),$$
$$y = g\tau t - (g\tau - v_0)(1 - \exp(-t/\tau)),$$

где τ — постоянная времени задачи, с, u, v_0 — постоянные размерностью скорости, м/с, g — ускорение силы тяжести.

Найти силу, действующую на точку.

Р е ш е н и е. Дифференцируя функции координат точки, найдем проекции скорости на декартовы оси:

$$v_x = dx/dt = u(1 - \exp(-t/\tau)),$$
$$v_y = dy/dt = g\tau + (g\tau - v_0)\exp(-t/\tau).$$

Повторное дифференцирование дает проекции ускорения точки:

$$a_x = dv_x/dt = u\exp(-t/\tau)/\tau = (u - v_x)/\tau,$$
$$a_y = dv_y/dt = (v_0/\tau - g)\exp(-t/\tau) = g - v_0/\tau.$$

Проекции равнодействующей силы, таким образом, определяются следующими выражениями:

$$F_x = ma_x = m(u - v_x)/\tau = \mu(u - v_x),$$
$$F_y = ma_y = mg - mv_y/\tau = mg - \mu v_y,$$

где $\mu = m/\tau$ — коэффициент пропорциональности в выражении силы сопротивления, линейно зависящей от скорости, кг/с = (Н·с/м).

В обратной задаче по известным действующим на точку силам и начальным условиям ее движения требуется найти закон $\overline{r} = \overline{r}(t)$ движения точки. Эта задача решается путем интегрирования дифференциальных уравнений (2) — (5) с последующим определением произвольных постоянных интегрирования по начальным условиям.

В динамике несвободной материальной точки встречаются задачи смешанного типа, когда требуется определить как закон движения точки, так и некоторые неизвестные из приложенных сил, а именно: реакции наложенных на точку связей.

Решение таких задач нужно выполнять в следующем порядке:

1. По условию задачи выбрать способ задания движения и ввести соответствующую систему координат.

2. Разработать расчетную схему — показать на чертеже точку в произвольном положении и приложенные к ней все действующие силы — как активные, так и силы реакции связей.

3. Составить векторное уравнение (1) движения точки и спроецировать его на выбранные оси (декартовы, естественные и др.).

4. Сформулировать начальные условия для полученной системы скалярных дифференциальных уравнений движения точки.

5. Проанализировать систему уравнений движения, оценивая:

связанность уравнений (т.е. присутствие координат и их производных в уравнениях системы),

тип каждого уравнения (порядок старшей производной, линейность, однородность и проч.).

6. Установить последовательность решения системы и методы интегрирования входящих в нее уравнений, ориентируясь на постановку вопросов в условиях задачи.

7. Получить общее решение системы дифференциальных уравнений и определить по начальным условиям постоянные интегрирования.

8. Использовать полученное решение для ответа на поставленные в условии вопросы.

Пример 2. Лодку оттолкнули от берега реки, сообщив ей скорость $\bar{v}_0$, направленную перпендикулярно берегу (рис. 2). Скорость $\bar{u}$ течения воды в реке неизменна по ширине h потока и постоянна во времени; сила сопротивления, действующая на лодку со стороны воды, $\bar{R} = -\mu \bar{v}_r$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\bar{v}_r$ — скорость лодки относительно воды.

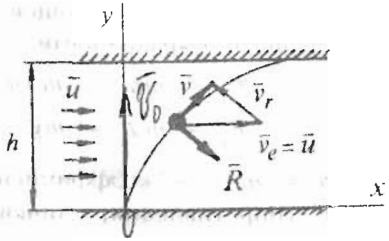


Рис. 2

Считая лодку материальной точкой массой m, определить, при каком минимальном значении начальной скорости v_0^* лодка достигнет противоположного берега. Найти расстояние, на которое отнесет лодку вниз течением реки к моменту ее причаливания при $v_0 = 2v_0^*$.

Р е ш е н и е. В данной задаче рассматривается двумерное (на плоскости) движение материальной точки. Для описания движения воспользуемся декартовой системой координат Oxy, оси которой расположены в горизонтальной плоскости, связанной с берегами реки, а начало совпадает с исходным положением точки. Векторное уравнение движения точки имеет вид

$$m\,d\bar{v}/dt = \bar{P} + \bar{Q} + \bar{R},$$

где $\bar{v}$ — абсолютная (относительно берега) скорость лодки, $\bar{P} = m\bar{g}$ — вес лодки, $\bar{Q}$ — выталкивающая (архимедова) сила, $\bar{R} = -\mu\bar{v}_r = -\mu(\bar{v} - \bar{u})$ — сила сопротивления.

Спроецируем его на декартовы оси:

$$m\ddot{x} = -\mu v_{rx} = -\mu(\dot{x} - u),$$
$$m\ddot{y} = -\mu v_{ry} = -\mu\dot{y},$$
$$m\ddot{z} = Q - mg.$$

Таким образом, движение лодки в плоскости Oxy описывается двумя несвязанными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами при начальных условиях

$$x(0) = y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0.$$

Выполняя во втором дифференциальном уравнении замену независимой переменной

$$\ddot{y} = dv_y/dt = v_y\,dv_y/dy,$$

преобразуем его к виду

$$\tau\,dv_y = -dy,$$

где $\tau = m/\mu$ — характерная постоянная времени данной задачи. Интегрируя это уравнение с учетом начальных условий, получим

$$y = (v_0 - v_y)\,\tau.$$

Это выражение позволяет найти v_0^* из условия $v_y = 0$, если $y = h$. Таким образом,

$$v_0^* = h/\tau = h\mu/m.$$

Очевидно, что при $v_0 > v_0^*$ лодка определенно достигнет противоположного берега за конечное время t^*, которое может быть найдено из решения уравнения

$$\tau\ddot{y} + \dot{y} = 0$$

при условиях $t = t^*$, $y = h$.

Определяя в общем решении

$$y = C_1 + C_2\,e^{-t/\tau}$$

по начальным условиям (при $t = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = v_0$) произвольные постоянные интегрирования $C_1 = -C_2 = \tau v_0$, получим частное решение

$$y(t) = \tau v_0\,(1 - e^{-t/\tau}).$$

Из условия $y = h$ при $t = t^*$ найдем время, необходимое для переправы:

$$t^* = -\tau\ln(1 - h/\tau v_0) = -\tau\ln(1 - h/2\tau v_0^*) = \tau\ln 2.$$

Интегрируя первое дифференциальное уравнение $\tau\ddot{x} + \dot{x} = u$, получим

$$x(t) = C_3 + C_4\,e^{-t/\tau} + ut,$$

где $\hat{x} = ut$ — частное решение неоднородного уравнения при $u = \text{const}$. При начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, находим $-C_3 = C_4 = u$, поэтому

$$x(t) = ut - u\tau\,(1 - e^{-t/\tau}).$$

Снос лодки к моменту причаливания составит

$$x(t^*) = ut^* - u\tau\,(1 - e^{-t^*/\tau}) = u\tau\,(\ln 2 - 0{,}5) = 0{,}193\,u\,m/\mu.$$

Пример 3. Материальная точка массой $m = 1{,}0$ кг может двигаться по круговой направляющей, расположенной в вертикальной плоскости. Точка скреплена с пружиной, жесткость которой $c = 196{,}0$ Н/м, а ее длина в недеформированном состоянии равна $2r$, $r = 20{,}0$ см — радиус направляющей (рис. 3).

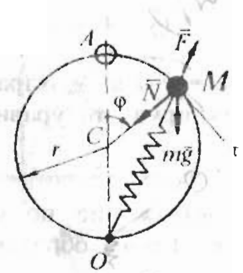


Рис. 3

1) Пренебрегая трением, определить, на какую максимальную высоту h опустится точка, начавшая движение без начальной скорости из положения, близкого к крайней верхней точке A ($\varphi_0 \approx 0{,}01$);

2) Из какого положения может начаться движение точки без начальной скорости по шероховатой направляющей (коэффициент трения $f = 0{,}2$) и на какую высоту она опустится в этом случае?

Р е ш е н и е. Поскольку форма траектории известна (окружность), используем естественный способ задания движения точки:

поместим начало отсчета координаты в точку A, за направление положительного отсчета координаты примем направление вправо от точки A,

в качестве координаты примем длину дуги $AM = s = r\varphi$.

Векторное уравнение движения точки имеет вид

$$m d\bar{v}/dt = \bar{F} + \bar{N} + m\bar{g}.$$

В проекциях на естественные оси — касательную и нормаль — движение точки описывается уравнениями

$$\begin{cases} m\ddot{s} = m\, dv_\tau/dt = mg\sin\varphi - F\sin(\varphi/2) - F_{\text{тр}}\,\text{sign}(v_\tau), \\ mv^2/r = N_n + mg\cos\varphi - F\cos(\varphi/2). \end{cases}$$

Здесь $F = c\lambda = c(2r - OM) = 2cr(1 - \cos(\varphi/2))$, $v_\tau^2 = v^2$, $F_{\text{тр}} \le fN$, $N = |\bar{N}|$.

В случае гладкой направляющей движение точки определяется первым уравнением этой системы при начальных условиях: при $t = 0$, $s \approx s_0$ ($\varphi = \varphi_0 \approx 0{,}01$), $v_\tau = 0$. Используя замену переменных

$$dv_\tau/dt = v_\tau\, dv_\tau/ds = v_\tau\, dv_\tau/r\,d\varphi,$$

представим это уравнение в виде

$$v_\tau\, dv_\tau/d\varphi = gr\sin\varphi - 2k^2r^2(1 - \cos(\varphi/2))\sin(\varphi/2),$$

где $k^2 = c/m$.

Интегрируя его, найдем общее решение

$$v^2/2 = C - gr\cos\varphi - 2k^2r^2(1 - \cos(\varphi/2))^2.$$

Определив из начальных условий константу $C = gr$ ($\cos(\varphi_0/2) \approx 1{,}0$), получим

$$v^2 = 2gr(1 - \cos\varphi) - 4k^2r^2(1 - \cos(\varphi/2))^2.$$

Значение угла φ^*, соответствующее крайнему нижнему положению точки, найдем из условия $v = 0$ при $\varphi = \varphi^*$, то есть

$$g(1 - \cos\varphi^*) = 2g\sin^2(\varphi^*/2) = 2k^2r(1 - \cos(\varphi^*/2))^2.$$

или

$$\frac{1 - \cos(\varphi^*/2)}{\sin(\varphi^*/2)} = \text{tg}(\varphi^*/4) = \sqrt{g/k^2r} = \sqrt{gm/cr},$$

откуда

$$\varphi^* = 4\,\text{arctg}\sqrt{gm/cr} = 4\,\text{arctg}(1/2) = 106{,}26°,$$

$$h = r(1 - \cos\varphi^*) = 25{,}6 \text{ см}.$$

Движение точки по шероховатой направляющей определяется системой связанных дифференциальных уравнений, которая приводится к одному нелинейному уравнению. Предварительно приведем уравнение к удобному для численного решения безразмерному виду: введем безразмерное время $x = t\sqrt{g/r}$ и безразмерные функции $y_1 = s/r = \varphi$, $y_2 = \dot{s}/\sqrt{gr}$.

В форме Коши уравнение движения будет иметь вид:

$$y_1' = dy_1/dx = y_2,$$

$$y_2' = dy_2/dx = \begin{cases} 0, & \text{если } |Q| < F_{\text{тр}}^{\max} \text{ и } y_2 = 0, \\ Q - \text{sign}(y_2)F_{\text{тр}}^{\max}, & \text{если } y_2 \ne 0, \end{cases}$$

где $Q = \sin y_1 - 2z(1 - \cos(y_1/2))\sin(y_1/2)$, $z = cr/mg$,

$F_{\text{тр}}^{\max} = f\,|\cos y_1 - 2z(1 - \cos(y_1/2))\cos(y_1/2) - y_2 \cdot |y_2||$.

Для численного интегрирования дифференциального уравнения движения точки составим на языке Фортран программу, используя библиотечную программу Рунге — Кутты 4-го порядка точности.

```
      Program dzdinpo
      external RP
      real y(8),F(2)
      common fr, z
      open(1,file='dzdinpo.dat',form='formatted')
      write(*,'(a40\)')'вводите xstop,stepx,fr,z:'
      read(*,*) xstop,stepx,fr,z
      x=0.
      y(1)=0.
      y(2)=0.
1     call RP(x,y,F)
      if (F(2).gt.0.) goto 2
      y(1)=y(1)+0.01
      goto 1
2     call RK4(2,x,stepx,y,RP)
      write(1,'(3f12.5)') x,y(1),y(2)
      x=x+stepx
      if (x.lt.xstop) goto 2
      end

            subroutine RK4(n,x,h,y,RP)
      real y(1),y0(8),y1(8),F(8)
      common fr, z
      h1=0.
      h2=h/2.
      do 11 i=1,n
      y0(i)=y(i)
11    y1(i)=y(i)
      do 12 j=1,4
      call RP(x+h1,y,F)
      h1=h2
      if (j.eq.3) h1=h
      do 12 i=1,n
      q=h1*F(i)
      y(i)=y0(i)+q
      if (j.eq.2) q=q+q
12     y1(i)=y1(i)+q/3.
      do 13 i=1,n
13     y(i)=y1(i)
      return
      end

            subroutine RP(x,y,F)
      real y(1),F(1)
      common fr, z
      F(1)=y(2)
      Frmax=2.*z*(1.-cos(y(1)/2.))
      F(2)=sin(y(1))-Frmax*sin(y(1)/2.)
      Frmax=abs(Frmax*cos(y(1)/2.)+y(2)*abs(y(2))-cos(y(1)))*fr
      F(2)=F(2)-sign(Frmax,y(2))
      if (y(2).eq.0..and.F(2).le.0.) F(2)=0.
      return
      end
```


Результаты численного решения показаны в таблице и на рис. 4.

x	$y(1)$	$y(2)$
0,0	0,2	0,0
. . .		
6,2	1,56920	0,32874
6,4	1,61378	0,11287
6,6	1,61818	-0,04679
6,8	1,60016	-0,13191

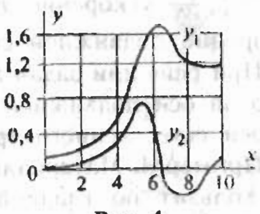


Рис. 4

Из таблицы интерполяцией находим, что при $y_2 = 0$ $x^* = 6{,}54$ и $y_1^* = \varphi^* = 1{,}61689$ (92,64°). Таким образом, высота опускания точки составит

$$h = r\,(\cos\varphi_0 - \cos\varphi^*) = 20{,}5 \text{ см},$$

и время движения будет равно

$$t^* = x^*\sqrt{r/g} = 6{,}54/7 = 0{,}934 \text{ с}.$$

2. Динамика материальной точки в неинерциальной системе отсчета (динамика относительного движения)

Дифференциальное уравнение, описывающее движение материальной точки (рис. 5) по отношению к системе координат $Axyz$, заданным образом движущейся относительно инерциальной системы отсчета $Ox'y'z'$, имеет следующую векторную форму:

$$m\frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2} = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k, \qquad (6)$$

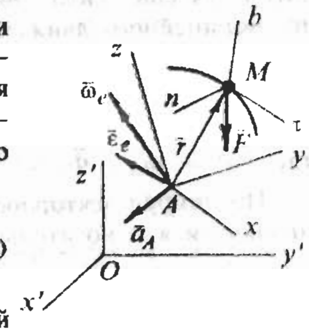


Рис. 5

где $\bar{\rho}$ — радиус-вектор точки в подвижной системе координат; $d^2\bar{\rho}/dt^2 = \bar{a}_r$ — вторая относительная производная радиуса-вектора — относительное ускорение точки; $\bar{F}$ — равнодействующая приложенных к точке сил; $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$, $\bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k$ — переносная и кориолисова силы инерции точки.

Кориолисово $\bar{a}_k$ и переносное $\bar{a}_e$ ускорения точки в общем случае движения системы координат $Axyz$ определяются по известным из кинематики формулам

$$\bar a_e = \bar a_A + \bar\omega_e\times\bar\omega_e\times\bar\rho + \bar\varepsilon_e\times\bar\rho, \qquad \bar a_k = 2\,\bar\omega_e\times\bar v_r, \qquad (7)$$

где $\bar a_A$ — ускорение полюса A; $\bar\omega_e$, $\bar\varepsilon_e$ — угловые скорость и ускорение подвижной системы отсчета.

При решении задач динамики векторное уравнение проецируют либо на оси подвижной декартовой системы координат $Axyz$, либо на оси естественного трехгранника $M\tau nb$.

Пример 4. Материальная точка массой m скользит по гладкой цилиндрической поверхности бака радиусом r (рис. 6). Бак движется с постоянным ускорением a вниз по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом.

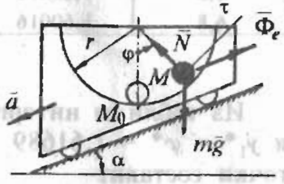


Рис. 6

Определить, при каком минимальном значении ускорения бака a^* точка сможет достигнуть его верхней кромки, начав движение из крайнего нижнего положения M_0 без начальной скорости?

Р е ш е н и е. Определим положение точки на цилиндрической стенке бака дуговой координатой $s = M_0M = r\varphi$. Система отсчета, связанная с баком, является неинерциальной, поэтому в дифференциальном уравнении относительного движения точки помимо приложенных к ней сил тяжести и реакции стенки бака должна быть учтена сила инерции от переносного поступательного прямолинейного движения бака

$$m\bar a_r = \bar P + \bar N + \bar\Phi_e,$$

где $\bar P = m\bar g$, $\bar\Phi_e = -m\bar a$.

Проецируя векторное уравнение на касательную к окружности, являющейся относительной траекторией точки, получим

$$m\,dv_r^\tau/dt = ma\cos(\varphi-\alpha) - mg\sin\varphi,$$

где $dv_r^\tau/dt = (dv_r^\tau/dt)\,ds/ds = v_r^\tau dv_r^\tau/(r\,d\varphi)$.

Разделяя переменные и интегрируя уравнение при начальном условии $v_r = 0$ при $\varphi = 0$, найдем

$$(v_r)^2/2r = a\,[\sin(\varphi-\alpha) + \sin\alpha\,] - g\,(1-\cos\varphi).$$

Точка достигнет верхней кромки бака, если при $\varphi = \pi/2$ $v_r^\tau \geq 0$, следовательно,

$$a^* = g/(\sin\alpha + \cos\alpha) = g\,/\left(\sqrt2\,\sin(\alpha+\pi/4)\right).$$

Пример 5. Материальная точка M массой m приводится в движение по гладкой неподвижной горизонтальной плоскости прямой лопаткой ротора, вращающегося вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 7). Лопатка AB длиной $l = r$, где r — радиус ротора, расположена под углом $\alpha = 45°$ к радиусу, проведенному в точку A крепления лопатки к ротору. При движении вдоль лопатки на точку действует сила сопротивления $\bar R = -\mu\,|\bar v_r|\,\bar v_r$ $(R = \mu v_r^2)$, $\mu = \text{const} > 0$; $\bar v_r$ — относительная скорость точки.

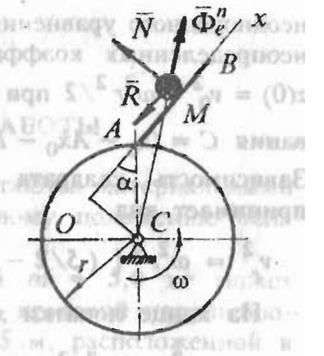


Рис. 7

Определить, с каким значением абсолютной скорости точка покинет лопатку, если движение ее началось из положения A с начальной относительной скоростью $v_0 = \omega r\cos\alpha$ и коэффициент сопротивления $\mu = m/(2r)$.

Р е ш е н и е. Направим вдоль лопатки ось Ox системы координат, начало которой поместим в точку O, как показано на рис. 7. В данной системе отсчета положение точки определяется одной координатой $x = OM$. Полагая, что сила тяжести уравновешивается реакцией гладкой опорной плоскости, запишем дифференциальное уравнение относительного движения точки в проекциях на ось Ox:

$$m\,dv_{rx}/dt = m\omega^2 x - \mu v_{rx}^2.$$

Выполняя замену переменной $dv_{rx}/dt = (dv_{rx}/dt)\,dx/dx = d(v_{rx})^2/(2dx)$, обозначим $(v_{rx})^2 = z$ и представим дифференциальное уравнение движения точки в виде

$$dz/dx + 2z/\lambda = 2\omega^2 x,$$

где $\lambda = m/\mu = 2r$ — характерная постоянная задачи с размерностью длины.

Общее решение полученного уравнения находим как суперпозицию общего решения соответствующего однородного уравнения

$$z_{\text{од}} = C\exp(-2x/\lambda)$$

и частного решения

$$\hat z = Ax + B$$

неоднородного уравнения, где $A = 2r\omega^2$ и $B = -rA$ находим методом неопределенных коэффициентов. Согласно начальным условиям $z(0) = v_0^2 = \omega^2 r^2/2$ при $x(0) = x_0 = r\sqrt{2}/2$, постоянная интегрирования $C = (z_0 - Ax_0 - B)\exp(x_0/r) = (5/2 - \sqrt{2})\,\omega^2 r^2 \exp(x_0/r)$. Зависимость квадрата относительной скорости от координаты принимает вид

$$v_r^2 = \omega^2 r^2 [\,(5/2 - \sqrt{2})\exp(-(x - x_0)/r) + 2(x/r - 1)\,].$$

На конце лопатки $x_k = x_0 + l = r(\sqrt{2}/2 + 1)$ и

$$v_{rk}^2 = \omega^2 r^2 [\,(5/2 - \sqrt{2})/e + \sqrt{2}\,] = 1{,}8137\,\omega^2 r^2.$$

Проекции и модуль абсолютной скорости точки:

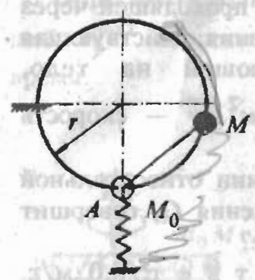
$$v_{ax} = v_{rk} - \omega r\sqrt{2}/2 = 0{,}640\,\omega r,$$

$$v_{ay} = \omega r(1 + \sqrt{2}/2) = 1{,}707\,\omega r,$$

$$v_a = 1{,}823\,\omega r.$$

ВАРИАНТЫ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

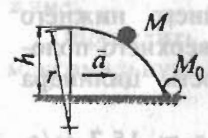
Во всех задачах материальные тела считаются материальными точками. Индекс "0" соответствует исходному положению тела (M_0), текущее положение — M.



1. Кольцо массой $m = 5{,}0$ кг может скользить по гладкой круговой направляющей радиусом $r = 0{,}5$ м, расположенной в вертикальной плоскости. Кольцо нитью AM связано с пружиной, жесткость которой $c = 402{,}0$ Н/м. Пружина недеформирована, когда кольцо находится в положении M_0.

Определить, при каком значении начальной скорости v_0 кольцо при движении из положения M_0 достигнет крайнего верхнего положения и максимальное значение силы давления кольца на направляющую.

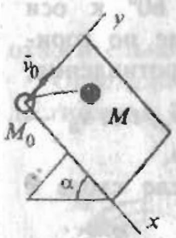
О т в е т: 10,0 м/с; 1049 Н.



2. Толкатель с гладкой круговой направляющей радиусом $r = 0{,}5$ м и высотой $h = r/2$ начинает двигаться по горизонтальной плоскости с постоянным ускорением $\bar{a}$ и приводит в движение тело, находившееся на плоскости в покое.

Определить, с каким значением относительной скорости тело покинет направляющую, если $a = g\sqrt{3}$. (Учесть, что поверхность толкателя является неудерживающей связью.)

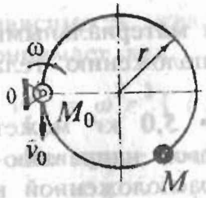
О т в е т: 2,56 м/с.



3. Тело массой $m = 1{,}0$ кг движется по плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. На тело действует сила сопротивления $\bar{R} = -\mu\bar{v}$, где v — скорость тела, $\mu = 0{,}2$ Н·с/м. Движение началось с начальной скоростью $v_0 = 1{,}0$ м/с, направленной перпендикулярно линии наибольшего ската Ox.

Полагая наклонную плоскость достаточно протяженной, найти значение предельной $(t \to \infty)$ скорости и наибольшее удаление тела от оси x.

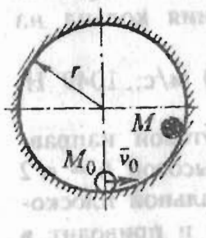
О т в е т: 24,5 м/с; 5,0 м.



4. Тело массой $m = 2{,}0$ кг движется по круговой направляющей радиусом $r = 1{,}0$ м, вращающейся в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью $\omega = 2{,}5$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку O. Сила сопротивления, действующая со стороны направляющей на тело, $\bar{R} = -\mu\,|\bar{v}\,|\,\bar{v}$ $(R = \mu v^2)$, где $\mu = 0{,}3$ Н$\cdot$с^2/м^2, $\bar{v}$ — скорость тела.

Определить, при каком минимальном значении относительной скорости v_0 тело, начавшее движение из положения O, совершит полный оборот и придет в исходное положение?

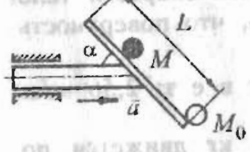
О т в е т: 8,0 м/с.



5. Тело может двигаться в вертикальной плоскости по гладкой внутренней поверхности цилиндра радиусом $r = 5{,}0$ м.

При каком значении начальной скорости v_0 тело, движущееся из крайнего нижнего положения, достигнет крайнего верхнего положения? (Учесть, что поверхность цилиндра является неудерживающей связью.)

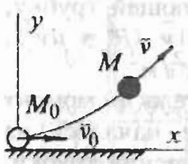
О т в е т: 15,7 м/с.



6. Толкатель начинает двигаться с постоянным ускорением $a = 1{,}0$ м/с^2 в прямолинейных направляющих и гладкой прямой лопаткой длиной $l = 1{,}0$ м, наклоненной под углом $\alpha = 60°$ к оси толкателя, приводит в движение по горизонтальной плоскости тело массой $m = 1{,}0$ кг. Сила сопротивления, действующая на тело со стороны плоскости, $\bar{R} = -\mu\bar{v}_a$, где v_a — скорость тела относительно плоскости, $\mu = 0{,}5$ Н$\cdot$с/м.

Какое расстояние пройдет тело до остановки после схода с лопатки толкателя?

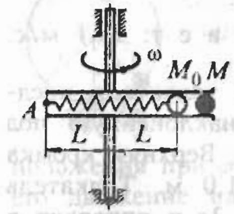
О т в е т: 3,46 м.



7. Планер массой $m = 400{,}0$ кг стартует с поверхности земли, имея начальную скорость $v_0 = 40{,}0$ м/с, направленную по горизонтали. Аэродинамические силы, действующие на планер, приводятся к равнодействующей, проекции которой $R_x = -\mu v_x$, $R_y = k v_x - \mu v_y$. Здесь v_x, v_y — проекции скорости планера, $\mu = 40{,}0$ Н$\cdot$с/м, $k = 280{,}0$ Н$\cdot$с/м — аэродинамические коэффициенты.

Определить максимальное значение вертикальной составляющей v_y^{max} скорости планера и соответствующее этому моменту время.

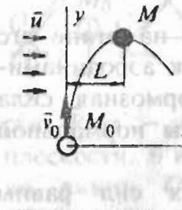
О т в е т: 48,2 м/с; t = 6,5 с.



8. Тело массой $m = 1{,}0$ кг движется внутри гладкой трубки, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10{,}0$ рад/с вокруг вертикальной оси. Тело связано с концом пружины AM. Жесткость пужины $c = 500{,}0$ Н/м, ее длина в недеформированном состоянии равна $2L = 20{,}0$ см. Движение началось без начальной относительной скорости из положения, соответствующего недеформированной пружине.

Определить наибольшее отклонение тела от оси вращения и максимальную величину силы давления на боковую стенку.

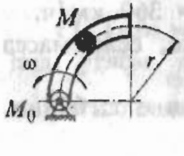
О т в е т: 15,0 см; 10,0 Н.



9. Тело массой $m = 1{,}0$ кг брошено вертикально с поверхности земли со скоростью $v_0 = 20{,}0$ м/с и движется в условиях ветра, дующего с постоянной по высоте скоростью $u = 8{,}0$ м/с. Сила сопротивления, действующая на тело, $\bar{R} = -\mu\bar{v}_r$, v_r — скорость тела относительно среды, $\mu = 0{,}2$ Н$\cdot$с/м.

Определ..ть значение горизонтального сноса L тела в момент достижения им наибольшей высоты.

О т в е т: 2,1 м.

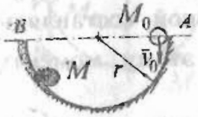


10. Тело массой $m = 1{,}0$ кг движется в трубке, изогнутой по дуге окружности радиусом $r = 0{,}2$ м с углом охвата 90°. Трубка вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой

скоростью $\omega = 5{,}0$ рад/с. Со стороны среды, заполняющей трубку, на тело действует сила сопротивления $\bar{R} = -\mu |\bar{v}| \bar{v}$ $(R = \mu v^2)$, где $\bar{v}$ — относительная скорость тела, $\mu = 1{,}5$ Н·с²/м².

Определить значение относительной скорости тела в момент его вылета из трубки, полагая, что его движение началось из состояния покоя в положении M_0, близком к оси вращения трубки.

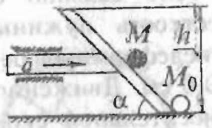
О т в е т: 1,18 м/с.



11. Тело движется в вертикальной плоскости по внутренней поверхности цилиндра радиусом $r = 5{,}0$ м. Коэффициент трения скольжения между телом и поверхностью $f = 0{,}2$.

Определить, при каком значении начальной скорости v_0 тело, начавшее движение из положения A, достигнет противоположной кромки цилиндра.

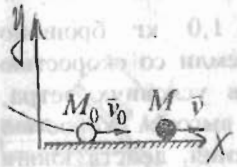
О т в е т: 15,1 м/с.



12. Рабочая поверхность толкателя представляет собой плоскость, наклоненную под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Верхняя кромка находится на высоте $h = 1{,}0$ м. Толкатель движется с ускорением $a = 2g$ и приводит в движение тело, находящееся на горизонтальной плоскости в покое. Коэффициент трения тела о поверхность толкателя $f = 0{,}2$.

Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на какую высоту над уровнем верхней кромки толкателя поднимется тело.

О т в е т: 0,2 м.

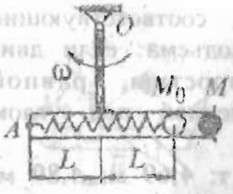


13. При посадке самолета на этапе его пробега по посадочной полосе к аэродинамическим силам добавляется тормозная сила $F = fN$, где N — модуль силы нормальной реакции полосы, $f = 0{,}05$.

Проекции равнодействующей аэродинамических сил равны $R_x = -\mu v^2$, $R_y = kv^2$, v — скорость самолета, μ и k — постоянные аэродинамические коэффициенты, удовлетворяющие условиям: 1) в момент приземления с посадочной скоростью $v_0 = 180$ км/ч $(kv_0^2 = mg)$, 2) в горизонтальном полете тяге мотора $Q = 20{,}0$ кН соответствует постоянная предельная скорость $v_{\text{пр}} = 360$ км/ч.

Найти путь, пройденный самолетом при посадке, если масса самолета $m = 1000$ кг.

О т в е т: 644 м.



14. Тело массой $m = 1{,}0$ кг движется внутри гладкой трубки, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10{,}0$ рад/с вокруг вертикальной оси O, отстоящей от трубки на некотором расстоянии. Тело связано с концом пружины AM. Жесткость пружины $c = 500$ Н/м, ее длина в недеформированном состоянии $2L = 20{,}0$ см.

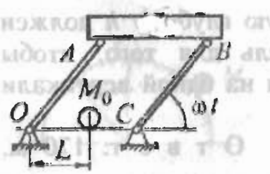
Полагая, что движение тела началось из состояния относительного покоя при недеформированной пружине, определить его максимальное отклонение от начального положения M_0.

О т в е т: 5,0 см.

15. Кольцо массой $m = 1{,}0$ кг может двигаться по гладкой круговой направляющей, расположенной в вертикальной плоскости. Кольцо связано с пружиной AM. Жесткость пружины $c = 196{,}0$ Н/м, ее свободная длина равна r, где $r = 20{,}0$ см — радиус направляющей.

Найти: положение равновесия кольца (кроме положения при $\varphi = 0$) и скорость кольца в этом положении, если его движение началось без начальной скорости из положения, близкого к B.

О т в е т: 1,682 рад; 1,62 м/с.

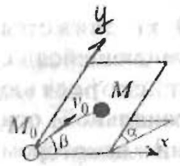


16. Тело приводится в движение по горизонтальной плоскости гладкими направляющими спарника параллелограммного механизма, кривошипы OA и CB которого одинаковой длины $L = 1{,}0$ м вращаются с постоянной угловой скоростью ω. Сила сопротивления со стороны плоскости $\bar{R} = -\mu\bar{v}$, где $\mu = \text{const} > 0$, $\bar{v}$ — скорость тела относительно плоскости. В начальный момент времени кривошипы располагались по линии OC, тело находилось в покое в положении M_0 $(OM_0 = L)$.

Определить, каким станет расстояние OM после поворота кривошипов на угол 180°.

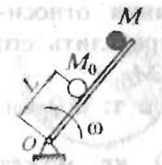
О т в е т: 1,0 м.

17. Тело массой $m = 1{,}0$ кг движется по плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. На тело действует сила сопротивления $\bar{R} = -\mu\bar{v}$, где $\bar{v}$ — скорость тела, $\mu = 0{,}5$ Н·с/м.



Найти координаты тела, соответствующие положению максимального подъема, если движение началось со скоростью, равной $v_0 = 10{,}0$ м/с и направленной под углом $\beta = 60°$ к оси x.

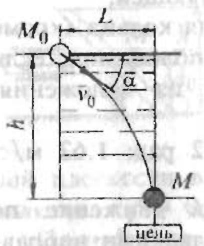
О т в е т: 4,69 м; 4,89 м.



18. Тело приводится в движение по гладкой горизонтальной плоскости прямой лопаткой, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega = 1{,}0$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. Коэффициент трения скольжения тела о поверхность лопатки $f = 0{,}2$.

Определить путь, пройденный телом вдоль лопатки за 1 с, если в начальный момент времени оно находилось в покое на расстоянии $L = 1{,}0$ м от оси вращения.

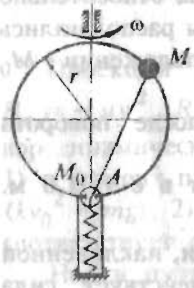
О т в е т: 0,476 м.



19. Глубинная бомба массой $m = 400{,}0$ кг входит в воду под углом $\alpha = 60°$ к поверхности со скоростью $v_0 = 100{,}0$ м/с и упреждением по дальности положения цели $L = 80{,}0$ м. Сила сопротивления воды $\bar{R} = -\mu\bar{v}$, где $\bar{v}$ — скорость бомбы, $\mu = 200{,}0$ Н·с/м.

Определить, на какую глубину h должен быть установлен гидростатический взрыватель для того, чтобы взрыв бомбы произошел в точке, находящейся на одной вертикали с целью.

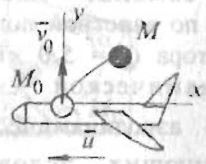
О т в е т: 170 м.



20. Кольцо может скользить по гладкой круговой направляющей радиуса $r = 20{,}0$ см, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Кольцо нитью AM соединено с пружиной, жесткость которой $c = 196{,}0$ Н/м. В крайнем нижнем положении кольца пружина недеформирована.

Определить, при каком значении угловой скорости ω кольцо, начавшее движение без начальной скорости вблизи крайнего нижнего положения, достигнет высоты, равной $1{,}5r$, масса тела $m = 1$кг

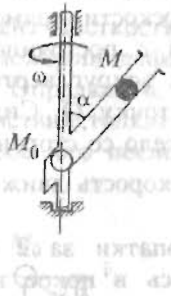
О т в е т: 31,3 рад/с.



21. При катапультировании кресло с пилотом общей массой $m = 250{,}0$ кг отделяется от самолета с начальной скоростью $v_0 = 10{,}0$ м/с. Сила сопротивления, действующая на кресло со стороны воздуха, $\bar{R} = -\mu\bar{v}_a$, где $\bar{v}_a$ — скорость кресла относительно воздуха, $\mu = 125{,}0$ Н·с/м — аэродинамический коэффициент. Скорость самолета в горизонтальном полете $u = 720$ км/ч.

Считая связанную с самолетом систему координат инерциальной, найти координаты кресла в момент достижения им максимальной высоты.

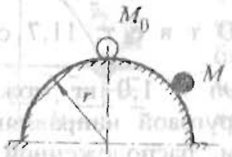
О т в е т: 3,0 м; 3,8 м.



22. Тело может двигаться внутри гладкой трубки, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 10{,}0$ рад/с. Угол между трубкой и осью вращения $\alpha = 30°$.

Определить, при каком значении начальной относительной скорости v_0 тело, начавшее движение от оси вращения, сможет покинуть трубку некоторой конечной длины.

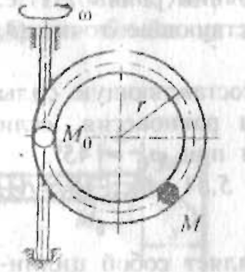
О т в е т: 1,7 м/с.



23. Тело начинает движение по поверхности гладкого сферического купола радиусом $r = 6{,}0$ м без начальной скорости из положения M_0, близкого к крайней верхней точке.

Определить, на каком расстоянии от поверхности купола тело упадет на горизонтальную плоскость.

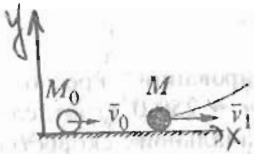
О т в е т: 0,75 м.



24. Тело может свободно двигаться в гладкой кольцевой трубке радиусом $r = 0{,}4$ м, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω относительно вертикальной оси. В начальный момент времени тело находилось в состоянии относительного покоя на оси вращения.

Определить наименьшую угловую скорость вращения, необходимую для перемещения тела в крайнее верхнее положение.

О т в е т: 7,0 рад/с.

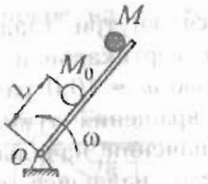


25. При взлете самолет массой $m = 1000$ кг разгоняется по взлетной полосе при постоянной тяге мотора $Q = 5{,}0$ кН.

Проекции аэродинамической силы $R_x = -\mu v_x^2$, . Здесь μ и k — аэродинамические коэффициенты, определяемые из следующих условий: 1) $kv_1^2 = mg$, где $v_1 = 180$ км/ч — минимальная скорость, необходимая для отделения от полосы; 2) в горизонтальном полете тяге $Q = 5{,}0$ кН соответствует предельная скорость $v_{пр} = 360$ км/ч.

Пренебрегая силой сопротивления, действующей со стороны полосы, найти длину пробега самолета при взлете.

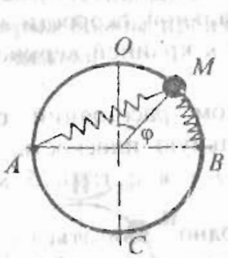
Ответ: 288 м.



26. Тело массой $m = 1{,}0$ кг приводится в движение по горизонтальной плоскости прямой гладкой лопаткой, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega = 0{,}4$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. Сила сопротивления, действующая на тело со стороны плоскости $\bar{R} = -\mu\bar{v}$, где v — скорость движения тела по плоскости, $\mu = 0{,}6$ Н·с/м.

Определить путь, пройденный телом вдоль лопатки за 2 с, если в начальный момент времени оно находилось в покое на расстоянии $L = 0{,}5$ м от оси вращения.

Ответ: 11,7 см.

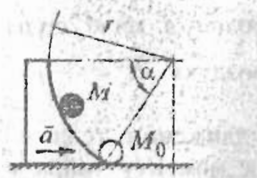


27. Кольцо массой $m = 1{,}0$ кг может двигаться по гладкой круговой направляющей радиусом $r = 0{,}6$ м, расположенной в горизонтальной плоскости. Кольцо связано с двумя одинаковыми пружинами, жесткость которых $c = 196{,}0$ Н/м. Длины пружин в недеформированном состоянии равны r (т.е. положение тела, соответствующее точке O, является равновесным).

Определить скорость кольца и радиальную составляющую силы его давления на направляющую в положении равновесия, если движение кольца началось из состояния покоя при $\varphi_0 = 45°$.

Ответ: 5,51 м/с; 18,3 Н.

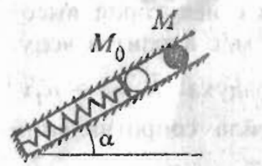
28. Рабочая поверхность толкателя представляет собой цилиндрическую поверхность радиусом r с углом охвата $\alpha = 60°$.



Толкатель начинает двигаться по горизонтальной плоскости с постоянным ускорением a и приводит в движение тело, находящееся на плоскости в покое.

Пренебрегая трением тела о поверхность толкателя, определить, при каком минимальном значении ускорения толкателя тело достигнет верхней кромки.

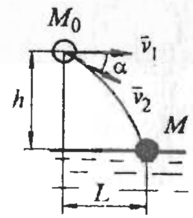
Ответ: 17,0 м/с^2.



29. Тело массой $m = 10{,}0$ кг движется из состояния покоя под действием пружинного толкателя по прямолинейной направляющей, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 30°$. Сила сопротивления со стороны направляющей $\bar{R} = -\mu|\bar{v}|\bar{v}$ $(R = \mu v^2)$, где $\mu = 50{,}0$ Н·с^2/м^2, коэффициент жесткости пружины толкателя $c = 1000{,}0$ Н/м, в начальном положении деформация пружины равна $L = 20{,}0$ см.

Определить, какую скорость получит тело к моменту окончания действия толкателя. Какую силу надо приложить к телу для того, чтобы его последующее движение оказалось равномерным?

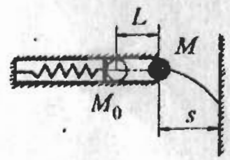
Ответ: 0,58 м/с; 66,0 Н.



30. С летящего на высоте $h = 100{,}0$ м самолета производится пуск реактивной глубинной бомбы. Скорость самолета $\bar{v}_1$ горизонтальна, относительная скорость отделения бомбы $\bar{v}_2$ составляет угол $\alpha = 30°$ с $\bar{v}_1$, $v_1 = 360{,}0$ км/ч, $v_2 = 100{,}0$ м/с, масса бомбы $m = 500{,}0$ кг.

Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить дальность полета бомбы L до касания ее с поверхностью воды. Полагая, что при движении в воде на бомбу действует сила сопротивления, проекция которой $R_y = -\mu|v_y|v_y$, где $\mu = 10{,}0$ Н·с^2/м^2, найти значение вертикальной составляющей скорости бомбы на глубине 50,0 м.

Ответ: 320 м; 32,0 м/с.

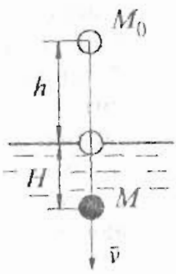


31. Тело массой $m = 0{,}1$ кг начинает движение в гладкой трубке из состояния покоя под действием пружины, жесткость которой $c = 4{,}0$ кН/м. Начальная деформация сжатия пружины составляет $L = 0{,}2$ м.

После вылета из трубки тело движется свободно в поле силы тяжести при действии силы сопротивления воздуха $\overline{R} = -\mu\overline{v}$, где $\mu = 0{,}05$ Н·с/м.

Пренебрегая сопротивлением воздуха при движении тела по трубке, определить, насколько оно опустится к моменту удара в стену, отстоящую от конца трубки на $s = 20{,}0$ м.

О т в е т: 1,48 м.



32. Тело массой $m = 20{,}0$ кг падает без начальной скорости с некоторой высоты и со скоростью 35,0 м/с входит в воду. Сила сопротивления воздуха $\overline{R} = -\mu_1\overline{v}$, где $\mu_1 = 2{,}0$ Н·с/м, сила сопротивления воды $\overline{R} = -\mu_2 |\overline{v}| \overline{v}$ $(R = \mu_2 v^2)$, $\mu_2 = 1{,}0$ Н·с^2/м^2. Пренебрегая некоторой потерей скорости при ударе тела о поверхность воды, определить: 1) с какой высоты h началось движение тела; 2) скорость погружения на глубине $H = 20{,}0$ м.

О т в е т: 1) 83,0 м; 2) 18,3 м/с.